Неравенства в целых числах, или с Новым 2023 годом!

Н. Н. Осипов
Красноярский математический центр (Красноярск)
e-mail: nnosipov@gmail.com

Аннотация

Материалы научно-популярной лекции, прочитанной online 4 февраля 2023 года.

По недавней традиции каждый год накануне Нового года автор сочиняет «новогоднюю задачу» (далее НГ-задача) для развлечения своих коллег, студентов и школьников. В условии задачи как-то должен обыгрываться номер наступающего Нового года, так что для этой цели идеально подходят теоретико-числовые задачи. Естественно, сама задача не должна быть слишком сложной, иначе никакого развлечения не выйдет. Но и совсем банальной её делать тоже смысла нет — будет скучно. Иными словами, это должна быть задача с содержательным математическим сюжетом.

В прошлогодней НГ-задаче предлагалось решить сравнение

$$x^{2021} + 111 \equiv 0 \pmod{2022},$$

причём нужно это было сделать в уме (чтобы была хоть какая-то интрига). В качестве подсказки давались числовые равенства

$$337 = 3 \cdot 111 + 4 = 3^4 + 4^4.$$

Случайным образом задача с похожим сюжетом оказалась позднее на LXXXV Московской математической олимпиаде (см. [8], задача 5 для 11 класса, второй день).

0.1. НГ-задача 2023

В этом году НГ-задача была такой.

НГ-задача 2023. Determine the smallest constant $c > 0$ such that the system of inequalities

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2023} < \frac{m}{n} + \frac{c}{mn} \tag{0.1}$$

has infinitely many solutions (m, n) in positive integers. And, for the smallest constant $c > 0$, give two solutions to the system above.

В принципе, ответ здесь можно угадать, если вспомнить про *цепные дроби* (см., например, учебники [1, 3]), которые, как известно, хорошо себя зарекомендовали в деле приближения иррациональных чисел рациональными дробями. А именно, напишем несколько *подходящих дробей* к числу $\sqrt{2023}$:

$$\frac{44}{1} < \frac{1979}{44} < \ldots < \sqrt{2023} < \ldots < \frac{2024}{45} < \frac{45}{1}.$$

Нас интересуют только те дроби, что находятся слева от $\sqrt{2023}$, а это в точности все подходящие дроби с чётными номерами. Именно они — гипотетически — могут обеспечить бесконечно много решений системе неравенств (0.1). Иными словами, можно попробовать взять

$$(m, n) \in \{(44, 1), (1979, 44), \ldots\}.$$

Тогда получим следующие ограничения на константу c снизу:

$$\begin{aligned}
&c > -1936 + 44\sqrt{2023} = 43{,}02198\ldots,\\
&c > -3916441 + 87076\sqrt{2023} = 43{,}49975\ldots,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Глядя на эти неравенства, уже можно предложить разумную гипотезу: искомое наименьшее значение константы c равно 43,5. Дальнейшие опыты с подходящими дробями эту гипотезу могли бы только подтвердить. Более того, мы нашли и два решения (m, n) системы (0.1) для этой константы c, т. е. полностью «решили» задачу.

Конечно, это никакое не решение задачи, а всего лишь наводящие соображения плюс правильно угаданный ответ. Накануне Нового года, учитывая предпраздничное настроение, такое «решение» вполне бы прокатило, но вот после — например, во время сессии на экзамене по теории чисел — обязательно потребовались бы разъяснения и доказательства.

Вообще, взгляд на нашу задачу с точки зрения теории приближения иррациональных чисел рациональными дробями обещает много интересных находок помимо «бесплатного» правильного ответа, но мы сосредоточимся на другом подходе, который связан с так называемыми уравнениями Пелля.

0.2. Примеры задач с аналогичным сюжетом

Вообще говоря, сюжет задачи известен довольно давно и имеет определённую популярность. Самое раннее упоминание, что удалось найти автору в литературе или сети Интернет — это задача 5.11 из сборника [2], датируемая 1978 годом.

- Доказать, что если числа $m,\ n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{7} - m/n > 0$, то

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}.$$

Эта задача приведена в указанном сборнике с полным и подробным решением. Следующей идёт задача с конкурса Stars of Mathematics (Romania, 2008).

- Let $\sqrt{23} > m/n$ where m, n are positive integers.

  i) Prove that

$$\sqrt{23} > \frac{m}{n} + \frac{3}{mn}.$$

  ii) Prove that

$$\sqrt{23} < \frac{m}{n} + \frac{4}{mn}$$

  occurs infinitely often, and give at least three such examples.

Обсуждение этой задачи можно найти на форуме Art of Problem Solving (см. по ссылке [5]). Далее следует задача, предложенная на Межрегиональной олимпиаде ГУ-ВШЭ по математике в 2011 году (см., например, по ссылке [7]).

- Натуральные числа p и q таковы, что $p/q < \sqrt{11}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{11}\,?$$

Обсуждение задачи есть на форуме dxdy (см. по ссылке [6]). И, наконец, последняя по времени появления — это задача 5287, опубликованная в 2012 году в задачном отделе журнала «Математика в школе» [4].

- Найдите все значения параметра $c > 0$, при которых система неравенств

$$\frac{m}{n} < \sqrt{34} < \frac{m}{n} + \frac{c}{mn}$$

  имеет бесконечно много решений в натуральных числах m и n.

Решение задачи (его автор — А. Ю. Эвнин) можно найти в № 5 журнала за 2013 год.

Интересно посмотреть на последовательность чисел, которые появляются в процитированных задачах, включая и НГ-задачу, под знаком квадратного корня:

$$7, \quad 11, \quad 23, \quad 34, \quad 2023.$$

Здесь легко подметить закономерность: всем числам, кроме 11, не хватает ровно двойки до полного квадрата (так, например, $2023 = 2025 - 2 = 45^2 - 2$). Важна ли эта закономерность или это просто случайность? И если данное обстоятельство действительно играет роль, то что делать с числом 11? И вообще, какой может быть технология решения подобных задач?

Чтобы разобраться с этими вопросами, поставим задачу в самом общем виде.

0.3. Общий случай

Что можно понимать под общим случаем? Прежде всего, число под корнем — обозначим его A — должно быть произвольным натуральным числом, отличным от точного квадрата. Далее следует рассмотреть систему неравенств

$$\frac{m}{n} < \sqrt{A} < \frac{m}{n} + \frac{c}{mn}, \tag{0.2}$$

где m, n — неизвестные, а c — параметр. Областью значений неизвестных естественно считать множество натуральных чисел, а областью допустимых значений параметра — множество положительных вещественных чисел. Теперь задача ставится сама собой: для каждого допустимого значения параметра c выяснить, сколь много решений (m, n) в натуральных числах может иметь система (0.2) и, в идеале, найти сами эти решения.

Почему случай, когда A есть точный квадрат, не вызывает особого интереса? Переписав систему неравенств (0.2) в виде

$$m < n\sqrt{A} < m + \frac{c}{m},$$

мы обнаружим, что ни при каком $c > 0$ здесь не может быть бесконечного множества решений в натуральных числах. Действительно, для всех достаточно больших m в качестве следствия получим невозможное двойное неравенство $m < n\sqrt{A} < m + 1$, поскольку теперь $n\sqrt{A}$ — целое число.

Пусть $A = s^2 + t$, где $s \geqslant 1$ и $1 \leqslant t \leqslant 2s$. Это представление однозначно, поскольку

$$s^2 < A < (s+1)^2$$

в силу ограничений на t и, таким образом, $s = [\sqrt{A}]$, а $t = A - s^2 = A - [\sqrt{A}]^2$.

В дальнейшем главную роль будет играть число k_0, которое мы определим как такое натуральное число, что *уравнение Пелля*

$$m^2 - An^2 = -k \tag{0.3}$$

не имеет решений (m, n) в целых числах при *каждом* натуральном $k < k_0$, а при $k = k_0$ оно разрешимо в целых числах. Иными словами, k_0 — это наименьшее натуральное число k, для которого уравнение (0.3) разрешимо в целых числах. Причина возникновения уравнения (0.3) в нашей задаче проста: из левого неравенства системы (0.2) следует, что величина $m^2 - An^2$ должна быть отрицательной и, очевидно, целой, т. е. равной какому-то $-k$. Число k_0 показывает, каким заведомо не может быть это $-k$, а именно: $-k$ не может быть больше, чем $-k_0$.

Тривиальный случай $k_0 = 1$ возможен. Также имеет место очевидная оценка сверху

$$k_0 \leqslant t,$$

поскольку при $k = t$ уравнение (0.3) имеет решение $(m, n) = (s, 1)$. Можно показать, что как нижняя, так и верхняя граница для k_0 достижимы для бесконечно многих значений A.

Пример 0.1. При любом $s \geqslant 1$ для $A = s^2 + 2s$ имеем $k_0 = 2s$.

О том, как можно находить k_0 по данному A, будет рассказано в разделе 0.4.

Предложение 0.1. При любом $c < k_0/2$ система (0.2) имеет конечное множество решений (m, n) в натуральных числах.

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$\sqrt{A} = \frac{m}{n} + \frac{k}{(\sqrt{m^2 + k} + m)n},$$

где $k = An^2 - m^2$. В частности, если (m, n) — произвольное решение системы (0.2), то справедливо неравенство

$$\frac{k}{\sqrt{m^2 + k} + m} < \frac{c}{m},$$

которое равносильным образом преобразуется к виду

$$m^2(k - 2c) < c^2. \tag{0.4}$$

Заметим, что всегда $k \geqslant k_0$. Но тогда при $c < k_0/2$ из (0.4) следуют неравенства

$$m^2 < \frac{c^2}{k - 2c} \leqslant \frac{c^2}{k_0 - 2c}.$$

Следовательно, существует только конечное множество возможных значений m. Осталось заметить, что при фиксированном значении m существует только конечное множество значений n, для которых выполняется система неравенств (0.2) (из-за правого неравенства). $\square$

Предложение 0.2. При $c = k_0/2$ любое решение (m, n) уравнения

$$m^2 - An^2 = -k_0 \tag{0.5}$$

будет решением системы неравенств (0.2). В частности, последняя будет иметь бесконечно много решений.

Доказательство. Действительно, здесь $k = k_0$, так что (0.4) тривиально верно. □

Предложения 0.1 и 0.2 позволяют утверждать, что наименьшее число $c > 0$, для которого система неравенств (0.2) имеет бесконечно много решений (m, n) в натуральных числах — это $c = k_0/2$. Собственно, уже можно сказать, что НГ-задача 2023 решена, остался чисто технический момент: вычислить k_0 для $A = 2023$. Для произвольного A это также содержательная задача, которую мы обсудим далее в разделе 0.4. А сейчас продолжим выяснять, как устроено множество решений системы (0.2) при $c = k_0/2$.

Предложение 0.3. Пусть $c = k_0/2$ и (m, n) — произвольное решение системы неравенств (0.2). Тогда $(m, n) = (1, 1)$ или (m, n) — решение уравнения (0.5).

Доказательство. Неравенство (0.4) принимает вид

$$m^2(k - k_0) < (k_0/2)^2,$$

откуда выводим $k < k_0 + (k_0/2)^2/m^2$. Если доказать неравенство $m \geqslant k_0/2$, то тогда получим $k < k_0 + 1$ и, таким образом, $k = k_0$, откуда (m, n) — решение уравнения (0.5).

При $A \in \{2, 3\}$ имеем $k_0 \leqslant 2$ и условие $m \geqslant k_0/2$ выполняется автоматически.

Далее считаем $A > 4$ (в частности, $s \geqslant 2$). Из ограничений $k_0 \leqslant t \leqslant 2s$ и $s \geqslant 2$ следует, что $A = s^2 + t \geqslant 2k_0$. Теперь имеем

$$1 \leqslant n < \frac{m^2 + k_0/2}{m\sqrt{A}},$$

откуда вытекает неравенство

$$m^2 - m\sqrt{A} + k_0/2 > 0,$$

т. е. либо $m < (\sqrt{A} - \sqrt{A - 2k_0})/2$, либо $m > (\sqrt{A} + \sqrt{A - 2k_0})/2$. Рассмотрим оба случая.

а) Пусть $m < (\sqrt{A} - \sqrt{A - 2k_0})/2$. Имеем

$$\frac{\sqrt{A} - \sqrt{A - 2k_0}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A - 2t}}{2} = \frac{\sqrt{s^2 + t} - \sqrt{s^2 - t}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{s^2 + 2s} - \sqrt{s^2 - 2s}}{2} < 2.$$

Значит, $m = 1$. Тогда

$$n < \frac{1 + k_0/2}{\sqrt{A}} \leqslant \frac{1 + t/2}{\sqrt{s^2 + t}} < 2,$$

т. е. $n = 1$. Но пара $(m, n) = (1, 1)$ является решением системы неравенств (0.2) тогда и только тогда, когда $\sqrt{A} < k_0/2 + 1$. Можно показать, что последнее условие выполнено только если $k_0 = t = 2s$ и $A = s^2 + 2s$. Таким образом, в случае $A = s^2 + 2s$ при $s \geqslant 2$ есть решение $(1, 1)$ системы неравенств (0.2), которое не является решением уравнения (0.5).

б) Пусть теперь $m > (\sqrt{A} + \sqrt{A - 2k_0})/2$. Докажем неравенство $m \geqslant k_0/2$, рассуждая от противного. Пусть $m < k_0/2$, т. е. $k_0 \geqslant 2m + 1$. Тогда $k_0 > \sqrt{A} + \sqrt{A - 2k_0} + 1$. Значит,

$$t \geqslant k_0 > \sqrt{A} + \sqrt{A - 2k_0} + 1 \geqslant \sqrt{A} + \sqrt{A - 2t} + 1 = \sqrt{s^2 + t} + \sqrt{s^2 - t} + 1,$$

откуда получаем неравенство

$$t > \sqrt{s^2 + t} + \sqrt{s^2 - t} + 1,$$

при этом $1 \leqslant t \leqslant 2s$. Это имеет место только для $(s, t) = (2, 4)$, т. е. когда $A = 8$. Однако при $A = 8$ имеем $k_0 = 4$, а условие $m > (\sqrt{A} + \sqrt{A - 2k_0})/2$ превращается в условие $m > \sqrt{2}$, т. е. $m \geqslant 2$. Но тогда $m \geqslant k_0/2$, и мы приходим к противоречию.

Итак, доказано, что если $m > (\sqrt{A} + \sqrt{A - 2k_0})/2$, то $m \geqslant k_0/2$. Как уже было отмечено, тогда $k = k_0$ и (m, n) — решение уравнения (0.5). □

Теперь уже легко выяснить, при каких $c > 0$ система неравенств (0.2) будет неразрешима в натуральных числах.

Предложение 0.4. Система неравенств (0.2) не имеет решений (m, n) в натуральных числах тогда и только тогда, когда $c \leqslant c_*$, где

$$c_* = m_*(n_*\sqrt{A} - m_*), \tag{0.6}$$

а (m_*, n_*) — минимальное решение уравнения (0.5) в натуральных числах.

Доказательство. Ясно, что система неравенств (0.2) может оказаться неразрешимой только при $c < k_0/2$, а в случае неразрешимости такое c по предложению 0.3 должно удовлетворять неравенству

$$c \leqslant \frac{m}{\sqrt{m^2 + k_0} + m}\, k_0 \tag{0.7}$$

для любого решения (m, n) уравнения (0.5), а также — в случае $A = s^2 + 2s$, где $s \geqslant 2$ — ещё и неравенству

$$c \leqslant \sqrt{A} - 1.$$

Очевидно, что выполнение неравенства (0.7) для всех решений (m, n) уравнения (0.5) равносильно условию

$$c \leqslant \frac{m_*}{\sqrt{m_*^2 + k_0} + m_*}\, k_0 = m_*(n_*\sqrt{A} - m_*).$$

В то же время для $A = s^2 + 2s$ имеем $k_0 = 2s$ и $(m_*, n_*) = (s, 1)$, но

$$m_*(n_*\sqrt{A} - m_*) = s(\sqrt{s^2 + 2s} - s) < \sqrt{s^2 + 2s} - 1 = \sqrt{A} - 1$$

при $s \geqslant 2$. В итоге приходим к формуле (0.6). □

Итак, в нашей задаче про множество решений системы неравенств (0.2) есть два критических значения параметра $c > 0$ — это $c = c_*$ и $c = k_0/2$. Мы можем оценить расстояние

$$\Delta = k_0/2 - c_*$$

между ними. Поскольку $m_* \geqslant \sqrt{A - k_0}$, имеем

$$\begin{aligned}\Delta = k_0\left(1/2 - \frac{m_*}{\sqrt{m_*^2 + k_0} + m_*}\right) \leqslant k_0\left(1/2 - \frac{\sqrt{A - k_0}}{\sqrt{A} + \sqrt{A - k_0}}\right) \leqslant \\ \leqslant t\left(1/2 - \frac{\sqrt{A - t}}{\sqrt{A} + \sqrt{A - t}}\right) = t\left(1/2 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + t} + s}\right) \leqslant \\ \leqslant 2s\left(1/2 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + 2s} + s}\right) < 1/2.\end{aligned}$$

Таким образом, всегда $\Delta < 1/2$, что мы и увидим далее в примерах. Кстати,

$$\Delta = \frac{(n_*\sqrt{A} - m_*)^2}{2},$$

откуда получаем оценку $n_*\sqrt{A} - m_* < 1$, которая кажется не совсем очевидной.

0.4. Немного об уравнениях Пелля

Как найти k_0 и (m_*, n_*)? Можно исходить из следующего утверждения, которое мы приведём без доказательства: k_0 — это наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число

$$n \leqslant \sqrt{\frac{k_0(m_0+1)}{2A}},$$

что число $An^2 - k_0$ является точным квадратом m^2. Здесь m_0 — это первая компонента минимального решения (m_0, n_0) ассоциированного *классического уравнения Пелля*

$$m^2 - An^2 = 1$$

в натуральных числах. Таким образом, предварительно вычислив m_0, мы можем одновременно найти k_0 и (m_*, n_*), постепенно перебирая кандидаты на роль k_0, начиная с единицы.

К сожалению, у этого brute force алгоритма есть существенный недостаток: число m_0 может оказаться слишком большим. Так, например, при $A = 2017$ имеем

$$m_0 = 2269101789861587341828383948971624656815723149933827З.$$

Нам остаётся только надеяться, что при $A = 2023$ такого не случится.

Пример 0.2. Пусть $A = 57$. Можно убедиться, что $m_0 = 151$, $k_0 = 3$ и $(m_*, n_*) = (15, 2)$. Следовательно,

$$c_* = 15(2\sqrt{57} - 15) = 1{,}4950\ldots < 1,5 = k_0/2.$$

Здесь $\Delta = 0{,}0049\ldots$ весьма мало.

Для НГ-задачи 2023 вычисление k_0 и (m_*, n_*) по предложенному алгоритму потребовало бы больше времени (или, скорее, привлечения компьютера).

Пример 0.3. При $A = 2023$ имеем $m_0 = 2024$, $k_0 = 87$ и $(m_*, n_*) = (44, 1)$. Значит,

$$c_* = 44(\sqrt{2023} - 44) = 43{,}0219\ldots < 43{,}5 = k_0/2.$$

В этом случае $\Delta = 0{,}4780\ldots$ близко к верхней границе.

Пример 0.4. Пусть $A = 2023$. Как обосновать равенство $k_0 = 87$, не опираясь на алгоритм выше, а используя более простые аргументы?

Для доказательства неразрешимости уравнения

$$m^2 - 2023n^2 = -k \tag{0.8}$$

можно попробовать применить простейший метод — *метод остатков*. С помощью компьютера легко убедиться, что для каждого $k \leqslant 86$, кроме $k \in \{19, 38, 47, 59, 76, 83\}$, существует такой модуль $M \in \{7, 16, 17, 25\}$, что сравнение

$$m^2 - 2023n^2 \equiv -k \pmod{M} \tag{0.9}$$

неразрешимо. Следовательно, при указанных значениях k уравнение (0.8) также неразрешимо. Более того, неразрешимость при $k \in \{38, 76\}$ следует из неразрешимости этого уравнения при $k = 19$. Действительно, имеем

$$45^2 - 2023 \cdot 1^2 = 2,$$

поэтому если уравнение (0.8) разрешимо при $k = 38$, то оно будет разрешимо при $k = 2 \cdot 38 = 76$. Но из равенства

$$m^2 - 2023n^2 = -76$$

следует, что m и n чётны. Как следствие, уравнение (0.8) при $k = 19$ тоже должно быть разрешимым. Таким образом, нам осталось лишь убедиться в неразрешимости уравнения (0.8) при $k \in \{19, 47, 59, 83\}$. Весьма вероятно, что для этих k сравнение (0.9) будет иметь решения при любом M («волшебного модуля» нет). Увы, здесь нужны более сильные средства.

Без компьютера случай $A = 2023 = 45^2 - 2$ можно одолеть, если сразу доказывать общее утверждение: при любом целом $d \geqslant 2$ для $A = d^2 - 2$ имеет место равенство

$$k_0 = 2d - 3,$$

при этом $(m_*, n_*) = (d - 1, 1)$. Действительно, здесь

$$(m_0, n_0) = (d^2 - 1, d),$$

в чём нетрудно убедиться. Далее рассуждаем от противного: пусть $k_0 < 2d - 3$. Тогда

$$k_0 + 2n_*^2 \leqslant k_0 + \frac{k_0 d^2}{d^2 - 2} = \frac{2(d^2 - 1)k_0}{d^2 - 2} < \frac{2(d^2 - 1)(2d - 3)}{d^2 - 2} < 4d - 1.$$

Как следствие, получим двойное неравенство

$$(dn_* - 1)^2 < m_*^2 = d^2 n_*^2 - k_0 - 2n_*^2 < (dn_*)^2$$

при любом $n_* \geqslant 2$, что невозможно. Значит, $n_* = 1$, но тогда

$$(d - 1)^2 < m_*^2 = d^2 - k_0 - 2 < d^2,$$

что также невозможно.

В заключение дадим некоторую геометрическую интерпретацию полученных результатов. Решив неравенства (0.2) относительно n, получим

$$\frac{m}{\sqrt{A}} < n < \frac{m}{\sqrt{A}} + \frac{c}{m\sqrt{A}}.$$

Эта система неравенств определяет на координатной плоскости (m, n) область в виде неограниченной вправо полосы S между гиперболой H_1 и её наклонной асимптотой L (см. рис. 1). Ширина S стремится к нулю по мере удаления от начала координат. Ещё одна гипербола H_2, которая задана уравнением (0.5), либо находится вне S (при малых значениях параметра c), либо частично или полностью попадает внутрь S (при достаточно больших значениях c). При $c = k_0/2$ гипербола H_2 впервые оказывается целиком внутри S, при этом она аппроксимирует гиперболу H_1 с точностью порядка $1/m^3$ при $m \to \infty$ — именно этот случай представлен на рис. 1. Как было показано выше, при $c \leqslant k_0/2$ все целые точки (m, n) внутри S — за исключением, быть может, точки $(1, 1)$ — обязаны лежать на гиперболе H_2.

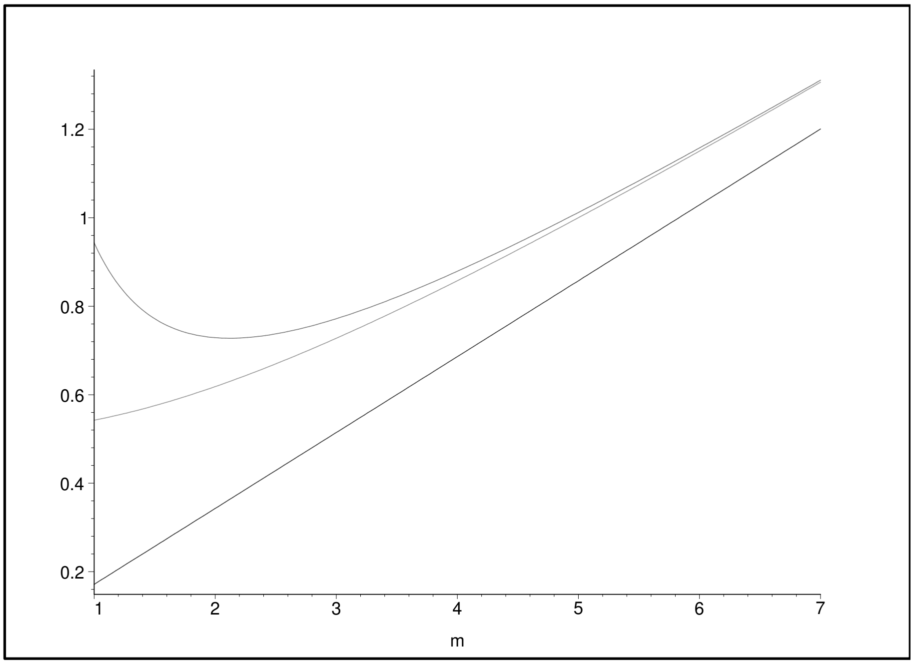

Рис. 1. Гиперболы H_1, H_2 и асимптота L при $A = 34$, $k_0 = 9$, $c = k_0/2 = 4{,}5$.

Список литературы

[1] *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

[2] *Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др.* Зарубежные математические олимпиады. М.: Наука, 1987.

[3] *Нестеренко Ю.В.* Теория чисел. М.: Академия, 2008.

[4] *Осипов Н.Н.* Задача 5287 // Математика в школе. 2012. № 10. С. 70.

[5] https://artofproblemsolving.com/community/c6h245324p1348687

[6] https://dxdy.ru/topic43339.html

[7] https://mathus.ru/olymp/vp2011m9.pdf

[8] https://mmo.mccme.ru/2022/85mmo.pdf