

**Майер Валерий Робертович**

**Системы динамической математики как эффективное средство цифровизации общего математического образования**

**1. О двух подходах к цифровизации общего математического образования.** Обсуждаемая сегодня на круглом столе тема «Проблемы современного математического образования» без всякого сомнения, тесно связана с информатизацией общества. Одним из основных и социально значимых направлений этого процесса является информатизация образования или, как сейчас всё чаще именуют это направление, «цифровизация образования».

Математическое образование, если рассматривать его в аспекте исторического развития, условно можно представить в виде трёх самостоятельных островов: профессиональное математическое образование, общее математическое образование и математическое просвещение. По мнению В.А. Садовниченко всякие реформы в математическом образовании – это в основном попытки навести мосты между названными островами. Предпринимались эти реформы, как правило, в рамках отдельных стран и строились национальными математическими архитекторами. В своём докладе «Математическое образование: настоящее и будущее» на Всероссийской конференции 2000 года в Дубне Садовничий отметил, что теперь дело в корне меняется. «Появился, – как он выразился, – наднациональный реформатор, у которого, как у Януса, – два лика. Один лик – это компьютеризация образования, второй – глобализация мира».

Существует, как известно, два принципиально различных подхода к информатизации образования. Первый из них ориентирован на так называемые *обучающие системы*. Схематично этот подход можно представить в виде последовательности следующих шагов.

1. Обучаемый сначала получает от компьютера сообщение, обдумывает его и принимает решение.

2. Затем принятое решение транслирует компьютеру.

3. Завершается очередной шаг определённой реакцией компьютера на полученное от обучаемого решение. При таком подходе компьютер, запрограммированный разработчиком, действует как наставник или, как нередко называют выполняемую им функцию, «непроницаемый учитель».

Второй подход ориентирован на *использование компьютера как инструмента познания* (обычно так он и именуется), на получение доступа к информации и организации собственных знаний при участии педагога. Основное отличие этого подхода от предыдущего заключается в том, что взаимодействие компьютера с обучающимся передается в ведение не компьютера, а самого обучающегося.

В силу целого ряда причин, в том числе и потому, что второй подход полностью согласуется с идеей развивающего обучения, научно-педагогическое сообщество, учителя школ и преподаватели вузов большинства стран отдают предпочтение ему. Если же вести речь об общем математическом образовании, проблемы которого обозначил в своём докладе Николай Дмитриевич, то самыми популярными инструментами познания, используемыми при обучении школьной математике, на сегодняшний день, являются так называемые системы динамической математики (СДМ). Отметим, что первоначально, они были ориентированы только на обучение геометрии и именовались по этой причине как системы динамической геометрии или интерактивные геометрические системы.

**2. Исторический обзор возникновения систем динамической математики.** Первые такие системы появились в конце восьмидесятых годов прошлого столетия. *История* их возникновения интересна и поучительна. Коснусь ее вкратце. Сама идея динамичности или движения в геометрии зародилась почти полтора столетия назад под влиянием Эрлангенской программы немецкого математика и педагога *Феликса Клейна*. Спустя всего два года французский математик *Анри Пуанкаре* в своей книге «О науке» предложил использовать реально существующие подвижные инструменты для обучения геометрии. В 1945 году американец *Генри Шер* детально разработал и изложил методы применения средств кинематографии при обучении математике с использованием изображений движущихся объектов.

Следующий этап развития идеи динамизма связан с появлением компьютерной техники. В 1963 году американский учёный в области информатики *Иван Сазерленд* создал первую графическую станцию *Sketchpad*, которая могла изображать горизонтальные и вертикальные линии, комбинировать из них геометрические фигуры, перемещать, поворачивать и масштабировать их, сохраняя основные свойства. В 1986 году во Франции появилась первая система динамической геометрии «*Cabri-geometry*». Она была разработана студентами профессора математики и информатики *Жана Мари Лаборде* как противовес проходившей в это время в стране тотальной бурбакизации математического образования, грозившей не только лишить

геометрию любой наглядности, но и полностью растворить этот предмет в линейной алгебре.

В 1989 году коллектив специалистов из Соединённых Штатов под руководством Николаса Джакива (Nicholas Jackiw) разработал систему динамической геометрии «*The Geometer's Sketchpad*». Четвёртая версия этой программы была закуплена Россией, в 2005 году русифицирована и разослана во все российские школы под названием «*Живая геометрия*». В настоящее время ее пятая версия распространяется под именем «*Живая математика*».

В 2002 году коллектив исследователей из Австрии под руководством Маркуса Хохенвартера разработал систему динамической математики *GeoGebra*. Эта программа вместе с Живой математикой являются сейчас самыми популярными. Отмечу, что на базе нашего университета открыт филиал Международного *GeoGebra* института, *Сибирский институт GeoGebra*. Завершая исторический обзор, отметим, что в 2006 году в России также была создана система динамической математики «*IC: Математический конструктор*». Всего в мире этих систем более 50.

**3. Основные возможности систем динамической математики.** Итак, в чём же изюминка любой системы динамической математики? Суть идеи проста: пользователь получает в своё распоряжение компьютерные инструменты, с помощью которых на экране, как на листе бумаги, можно выполнять практически любые геометрические построения, начиная от простейших построений циркулем и линейкой и, заканчивая изображением объектов на плоскости и в пространстве любой сложности. Для этого используются как основные инструменты (циркуль и линейка), так и дополнительные (середина отрезка, перпендикуляр и т.д.). Пользователь всегда может создать любой собственный инструмент. При этом не требуется умения программировать.

Системы динамической математики позволяют строить образы фигур под действием любых движений и подобий плоскости. При необходимости пользователь может разработать любое собственное преобразование. Любая система может выполнять необходимые измерения и вычисления, создавать геометрические места точек, строить графики функций и т.д.

Важнейшая особенность системы в том, что она «запоминает» не само изображение, а алгоритм его построения. По этой причине динамический чертёж представляет собой непрерывное семейство рисунков, удовлетворяющих одним и тем же условиям, причём в каждый момент времени это семейство представлено лишь одним рисунком.

Основные виды деятельности обучающихся в процессе использования любой системы динамической математики - это наблюдения, эксперименты и конструирование.

**4. Компьютерная анимация в обучении математике.** Что принципиально новое привносит компьютер в математическое образование, в методику обучения математике? Если методику преподавания математики рассматривать и как теорию, и одновременно как практико-ориентированное искусство обучения с опорой на интуитивное, чувственное восприятие математических понятий и утверждений, то компьютер предоставляет мощное средство обращения к интуиции, такое как *анимация*.

Под *компьютерной анимацией* мы будем понимать компьютерную имитацию реального или идеального процесса с помощью изменения формы объектов, текста или показа последовательных изображений с фазами движения. В работах многих исследователей убедительно обосновывается, что компьютерная анимация в обучении представляет собой перспективное направление в образовании.

Особенно актуальна компьютерная анимация при обучении такой абстрактной учебной дисциплине как математика. По мнению Николая Андреева, заведующего лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова, в ситуации снижения общего уровня образованности приходится идти на хитрость: показывать что-то красивое, где применяется математика, в надежде, что учащемуся станет интересно, и он захочет ее изучать. Создаваемые в лаборатории математические анимационные этюды умеют превращать абстракции «царицы наук» в наглядные истории о вещах, окружающих нас.

Одна из основных проблем, которая препятствует массовому участию математиков и программистов в подготовке подобных фильмов – большие трудозатраты. К программным средствам, предоставляющим возможность, не прибегая к помощи мощных специализированных графических систем, создавать и успешно использовать в обучении анимационные чертежи, относятся системы динамической математики, о которых шла речь ранее.

**5. Анимации в среде Живая математика.** В Живой математике имеется несколько способов задания анимации, к которым относятся ручная, кнопочная, ползунковая и параметрическая. Наш опыт работы в среде Живая математика позволяет утверждать, что дидактические возможности среды Живая математика эффективно реализуются при конструировании динамических анимационных моделей, поддерживающих практически все темы и разделы курса геометрии в школе и педвузе.

Спектр типов анимационных чертежей, с точки зрения целей и методик их применения при обучении математике в школе, достаточно широк. Если их расположить по частоте применения в реальном учебном процессе, то они расположатся следующим образом:

1) анимационные чертежи иллюстративного плана, рассчитанные на пассивное восприятие учащимися;

2) анимационные чертежи для проведения учебных экспериментов и исследований на уроке или во внеурочное время, подготовленные учителем или самими учащимися;

3) анимационные чертежи, которые либо полностью, либо частично построены учащимися, в обоих случаях с помощью этих чертежей учащиеся в соответствии с заданием должны самостоятельно построить новые объекты, при необходимости выполнить вычисления, осуществить верификацию полученных результатов.

Эта классификация является достаточно условной. Некоторые анимационные чертежи можно с успехом отнести к двум и даже ко всем трём типам. Это во многом зависит от того как сформулирована соответствующая геометрическая задача. Рассмотрим на конкретных примерах каждый из типов.

**5.1. Анимационные чертежи – иллюстрации.** Наиболее очевидный, и по этой причине наиболее востребованный на практике вариант использования систем динамической математики – создание анимационных чертежей-иллюстраций к геометрическим задачам. Преимущество этого типа: простота выполнения геометрических построений, сравнимых с рисованием на бумаге от руки; аккуратностью; широкими оформительскими возможностями, присущими компьютерным графическим редакторам; возможностью редактирования; возможностью изменять начальные данные геометрической конфигурации при сохранении алгоритма построения и, следовательно, геометрического смысла итоговой конфигурации; наличие команд, облегчающих именно геометрические построения. Рассмотрим примеры анимационных чертежей иллюстраций (слайды 5.1.1 – 5.1.6).

**5.2. Анимационные чертежи для экспериментов и исследований.** Возможность работы с анимационными моделями фигур создаёт комфортные условия по изучению свойств этих фигур в стиле экспериментальной математики.

Анимационные чертежи, инструменты для измерения геометрических величин, а также способность строить траектории движущихся объектов и геометрические места точек в Живой математике открывают огромные возможности для проведения учебных экспериментов и исследований.

Отметим, что исследовательский подход к изучению свойств фигур через компьютерный эксперимент увеличивает эмоциональную вовлечённость учащихся в процесс познания, а заодно помогает лучше усвоить и запомнить изучаемый материал.

Рассмотрим примеры заданий, выполнение которых связано с построением динамических чертежей для экспериментов и исследований, позволяющих от наблюдения перейти к открытию (слайды 5.2.1-5.2.6).

**5.3. Анимационные чертежи для самостоятельного построения новых объектов.** Самый высокий уровень применения систем динамической математики при обучении математике - это использование анимационных чертежей для самостоятельного построения новых объектов.

Если учащиеся впервые познакомились с системой динамической математики в старших классах, то мало кто из них способен самостоятельно создавать не только стереометрические чертежи, но и анимационные рисунки, поддерживающие задачи по планиметрии. Связано это не с неумением находить нужные кнопки с нужными инструментами (здесь цифровое поколение опережает своих учителей), сколько со слабым знанием самой геометрии, с отсутствием навыков и умений использовать циркуль и линейку для построения геометрических фигур. Для решения этой проблемы знакомить учащихся с Живой математикой нужно с пятого класса, сразу после окончания начальной школы. Тем более, что концепция обучения геометрии в 5-6 классах в большей степени носит не дедуктивный, а эмпирический характер, что вполне согласуется с парадигмой динамической математики. В связи с этим большинство учащихся при построении анимационных чертежей третьего типа вынуждены использовать готовые инструменты или модели фигур, созданные либо производителями систем динамической математики, либо педагогическим сообществом. Многочисленные файлы таких моделей можно найти в интернете в свободном доступе. Приведём примеры (слайды 5.3.1-5.3.9).

**6. Заключение.** Лучший способ познакомить будущих учителей математики с тем, как системы динамической математики можно использовать в предстоящей им профессиональной деятельности – это продемонстрировать применение этих систем в соответствующих дисциплинах высшего учебного заведения. Что мы и пытаемся делать в Красноярском педагогическом университете.

В настоящее время мне уже трудно представить такие геометрические курсы бакалавриата как элементарная геометрия, аналитическая геометрия, геометрические построения на плоскости и в пространстве, методы изображений, геометрические преобразования, проективная геометрия,

основания геометрии и дифференциальная геометрия без ЖМ. Преподаватели, читающие курс алгебры, во многих модулях и разделах также органично и естественно используют среду GeoGebra.

Кроме того, нами в 2012 году подготовлена и успешно реализуется магистерская программа «Информационные и суперкомпьютерные технологии в математическом образовании», в которой мы обстоятельно знакомим студентов не только с Живой математикой и GeoGebra, но и другими программами. Соответствующие направления представлены и в научной тематике аспирантуры по теории и методике обучения математике, и в тематике кафедрального научного коллектива «Моделирование систем и процессов в математике и математическом образовании». В течение девяти последних лет ежегодно проводим Всероссийские с международным участием научно-методические конференции «ИТвМиМО». Среди значимых публикаций – три монографии, три учебных пособия, опубликованных в центральной печати России и Казахстана, более ста научных статей. Нами разработана концепция обучения математике в педагогическом вузе с использованием компьютерной анимации, ведётся работа по адаптации этой концепции к условиям общеобразовательной школы.

Какие выводы можно сделать с учётом многолетнего опыта изучения нашим коллективом возможностей использования систем динамической математики при обучении школьников и студентов?

1. Системы динамической математики позволяют обогатить процесс обучения математике экспериментальными и эвристическими методами познания, в основе которых лежит компьютерная анимация.

2. Главной идеей применения на занятиях по математике любой системы динамической математики является самостоятельное "открытие" или «переоткрытие» обучающимися математических закономерностей.

3. Система динамической математики - это самобучающаяся и одновременно развивающаяся среда, которая в самое ближайшее время станет трендом современной «цифровой школы».