Неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ целых функций экспоненциального типа в равномерной норме

А. О. Леонтьева[1]

[1]*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург*

Пусть $\mathbf{B}_\sigma$ — введённый С. Н. Бернштейном класс целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на вещественной оси. Производная Рисса порядка $\alpha > 0$ определяется на подклассе $\mathbf{V}_\sigma$ равенством

$$D^\alpha f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e^{itz} ds(t), \quad f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} ds(t), \quad s \in BV[-\sigma, \sigma]. \tag{1}$$

Таким определением пользовались, в частности, П. Сайвин [1] и П. И. Лизоркин [2].

Для $0 < \alpha < 1$ определение (1) равносильно определению при помощи сингулярного интеграла

$$D^\alpha f(x) = C(\alpha) \int_0^\infty \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^{\alpha+1}} dy, \quad 0 < \alpha < 1; \quad C(\alpha) = -\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}. \tag{2}$$

Сингулярные интегралы исследовали Е. М. Стейн [3], П. И. Лизоркин [4], С. Г. Самко [5] в связи с изучением потенциала Рисса. Будем считать, что производная Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ определяется при помощи формулы (2).

Исторические сведения и подробную информацию о дробных интегралах и производных Рисса можно найти в [6, гл. 25, 26].

Нас будет интересовать точное неравенство Бернштейна для производной Рисса целых функций из $\mathbf{B}_\sigma$:

$$\|D^\alpha f\| \le \mathcal{B}_\sigma(\alpha)\|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \tag{3}$$

в равномерной норме $\|f\| = \sup\{|f(x)|\colon x \in (-\infty, \infty)\}$ на числовой оси.

При $\alpha \ge 1$ неравенство (3) хорошо изучено [7, 8, 9, 2]. Оно выполняется с константой $\mathcal{B}_\sigma(\alpha) = \sigma^\alpha$ или $B_n(\alpha) = n^\alpha$ и обращается в равенство на функции $\cos\sigma x$ или $\cos nx$. Ключевую роль в этих результатах играет то, что производная Рисса функций из $\mathbf{B}_\sigma$ представима при помощи интерполяционной формулы по равномерным узлам. Её коэффициенты знакочередуются при $\alpha \ge 1$.

В данной работе написана интерполяционная формула для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функций из $\mathbf{B}_\sigma$. Эта формула имеет неравномерные узлы — нули функций Бесселя. С её помощью при $0 < \alpha < 1$ получено точное неравенство Бернштейна (3).

Автор благодарит Виталия Владимировича Арестова за полезное обсуждение задачи. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

ЛИТЕРАТУРА

1. Civin P. *Inequalities for trigonometric integrals.* Duke Math. J. 1941. Vol. 8, № 4. P. 656–665.
2. Лизоркин П. И. *Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных.* Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 4. № 3. С. 109–126.
3. Stein E. M. *A characterization of functions arising as potentials. I.* Bull. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 67, № 1. P. 102–104.
4. Лизоркин П. И. *Описание пространств* $L_p^r(R^n)$ *в терминах разностных сингулярных интегралов.* Матем. сб. 1970. Т. 81(123). № 1. С. 79–91.
5. Самко С. Г. *О пространствах риссовых потенциалов.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976 Т. 40. № 5. С. 1143–1172.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987.
7. Szegő G. *Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein.* Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. Vol. 5, № 4. P. 59–70.
8. Соколов Г. Т. *О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм.* Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. Т. 6–7. С. 857–884.
9. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Физматлит, 1965.

Леонтьева Анастасия Олеговна, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, **e-mail:** lao-imm@yandex.ru