

Формальное интегрирование операторов Роты-Бакстера на полных алгебрах Ли

М. Е. Гончаров¹

¹ *Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

Операторы Роты-Бакстера возникли в работе Г. Бакстера как формализм при изучении операторов интегрирования. Позже, данные операторы естественным образом возникли в работах А.А. Белавина и В.Г. Дринфельда и М. А. Семенова-Тян-Шанского при изучении треугольных и факторизуемых биалгебр Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Линейное отображение $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ называется оператором Роты-Бакстера веса λ на $\mathfrak{g}$, если для любых $a, b \in \mathfrak{g}$ выполняется

$$[R(a), R(b)] = R([R(a), b] + [a, R(b)] + \lambda[a, b]).$$

В работе [1] было дано определение оператора Роты-Бакстера на группе.

Определение Пусть G — группа. Отображение $B : G \mapsto G$ называется оператором Роты-Бакстера на группе G , если для любых $g, h \in G$:

$$B(g)B(h) = B(gB(g)hB(g)^{-1}).$$

В той же работе было доказано, что если G — группа Ли, то касательное отображение к гладкому оператору Роты-Бакстера на G будет оператором Роты-Бакстера веса 1 на соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Однако остается открытым вопрос об интегрировании операторов Роты-Бакстера ненулевого веса с алгебры Ли на её группу Ли.

В данной работе данный вопрос рассматривается с алгебраической точки зрения. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, полная относительно некоторой фильтрации $\mathcal{F}_\bullet$. Тогда алгебру $\mathfrak{g}$ можно рассматривать как группу относительно операции $*$, определенной как

$$x * y = BCH(x, y) = \log(\exp(x) \exp(y)) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$$

Возникает вопрос о продолжении операторов Роты-Бакстера веса 1 с исходной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ на группу $(\mathfrak{g}, *)$. В данной работе этот вопрос решается положительно.

Теорема. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathcal{F}_\bullet)$ — алгебра Ли с фильтрацией, $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — оператор Роты-Бакстера, сохраняющий фильтрацию. Тогда R можно продлить до оператора Роты-Бакстера $\mathcal{B}$ на группе $(\widehat{\mathfrak{g}}, *)$, где $\widehat{\mathfrak{g}}$ — пополнение исходной алгебры Ли относительно фильтрации $\mathcal{F}_\bullet$.

Данная работа была выполнена совместно с П. Колесниковым, Ю. Шенгом и Р. Тангом (Jilin University).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Guo L., Lang H. and Sheng Y., *Integration and geometrization of Rota-Baxter Lie algebras*. Advances in Mathematics. 2021. T 387. 107834.

Гончаров Максим Евгеньевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** gme@math.nsc.ru